

Milieux de second gradient, Théorie, Interprétation, Exemples.

Les matériaux de second gradient sont ceux dont les actions mécaniques internes dépendent non pas de la déformation, comme c'est le cas dans les milieux continus habituels, mais du gradient de la déformation, c'est à dire du second gradient du déplacement.

Dans une première partie nous construirons explicitement de tel matériaux comme modèles homogénéisés de treillis périodiques. Nous verrons ainsi, par des calculs élémentaires, que la fabrication de matériaux où les effets de second gradient sont prépondérants est possible. Nous obtiendrons aussi des interprétations microscopiques simples des particularités de la théorie. Le modèle mono-dimensionnel de la poutre en flexion est bien connu ; ce sera le point de départ de notre réflexion. Nous verrons comme l'utiliser pour construire des modèles bi et tri-dimensionnels dans lesquels l'énergie élastique dépend de la seconde dérivée longitudinale d'un déplacement transverse. Une modification astucieuse du design de la période du treillis permet de construire des modèles, de dimension un d'abord puis de dimension deux et trois, plus originaux dans lesquels l'énergie élastique dépend de la seconde dérivée longitudinale du déplacement longitudinal. Des actions extérieures spéciales, les « doubles forces », ont des effets surprenants sur l'état d'équilibre. Leur interprétation microscopique devient claire.

Dans une deuxième partie nous étudierons l'écriture variationnelle des problèmes de statique pour des matériaux élastiques de second gradient en se focalisant sur le caractère admissible ou non d'actions extérieures. Un rappel du cas de l'élasticité standard permettra de séparer les limitations qui découlent de la théorie utilisée (premier ou second gradient : ce choix est en lui-même un choix de comportement) des limitations qui découlent des lois de comportement que l'on utilise pour préciser le comportement du matériau dans le cadre de la théorie choisie ainsi que de la dimension de l'espace dans lequel le problème est posé. Par exemple le fait qu'une densité surfacique de couples ne puisse être imposée sur le bord d'un matériau élastique standard en équilibre est lié au fait qu'il s'agit d'un matériau de premier gradient alors que le fait qu'une densité de force concentrée sur une ligne ou en un point n'est pas admissible pour un matériau élastique linéaire est lié à l'hypothèse de linéarité : de telles forces peuvent être admissibles pour certains matériaux non-linéaires. Nous nous pencherons aussi sur les ambiguïtés inévitables de la description des efforts externes. Ces ambiguïtés existent dans la théorie classique et sont souvent passées sous silence. Elles sont plus nombreuses et plus visibles dans la théorie du second gradient.

Dans une troisième partie, nous nous intéresserons au statut du théorème de Cauchy dans la théorie du second gradient. Ce théorème de représentation des efforts internes par un « tenseur de contraintes » est considéré comme la clé de voûte de la mécanique des milieux continus. Nous verrons qu'il repose sur des hypothèses qui doivent être remises en cause. Nous verrons aussi comment le généraliser pour définir les tenseurs de contraintes et d'hypercontraintes.

Dans une quatrième partie nous étudierons l'application de la théorie du second gradient à la modélisation des interfaces diffuses. Les interfaces diffuses décrivent la séparation entre deux phases comme une zone de variation rapide mais continue de la densité. L'énergie associée à cette variation de densité est typiquement un effet de second gradient. L'angle de contact, angle formé par l'interface et la paroi à la ligne de contact est un effet des actions de surface associées à la théorie de second gradient. La relation entre le modèle d'interface diffuse et le modèle classique de Laplace pour les interfaces sera établie.

Dans une dernière partie, nous reviendrons sur les tentatives de description des interfaces diffuses dans le cadre d'une théorie du premier gradient, et sur les tentatives de résolution des paradoxes qui apparaissent alors, par l'utilisation d'une « thermodynamique généralisée ». L'erreur de modélisation mécanique est manifeste et cet épisode montre les dangers que font courir les « assouplissements » des principes de la physique.