

Homogénéisation et contraintes de Cauchy

Pierre Seppecher

Université de Toulon

Motivations

Montrer que le concept de contraintes de Cauchy résiste mal à l'homogénéisation.

- 1) Contraintes de Cauchy
- 2) Inadaptation en cas de forces d'arêtes
- 3) Inadaptation en cas de matériaux de second gradient
- 4) Exemples 1D
- 5) Premier exemple 3D
- 6) Matériaux atteignables par homogénéisation

Contraintes de Cauchy

Un concept à la base de la mécanique des milieux continus. Décrit les actions mécaniques exercées par une partie du matériau sur la partie voisine.

Contraintes de Cauchy

Un concept à la base de la mécanique des milieux continus. Décrit les actions mécaniques exercées par une partie du matériau sur la partie voisine.

Hypothèses de la construction de Cauchy :

- H1) Actions représentables par une densité surfacique F de forces sur la frontière Σ de séparation.
- H2) F dépend de la position x et de l'orientation n de la frontière : $F(x, n)$.
- H3) F est continue en x .
- H4) l'action de F sur un volume fermé est équilibrée par une densité volumique (forces à distance ou d'inertie) bornée.

Contraintes de Cauchy

Théorème de Noll (1973): H_2 est entraînée par

- H_2') $F(x, \Sigma)$ est bornée.

Contraintes de Cauchy

Théorème de Noll (1973): H2 est entraînée par

- H2') $F(x, \Sigma)$ est bornée.

Principe de la démonstration de Cauchy : considérer

- un volume tendant vers zéro : *la dépendance en x devient négligeable. Les quantités volumiques aussi et l'action de F s'auto-équilibre.*
- un tétraèdre dont trois faces sont de directions fixées (*ainsi F y est fixée*) et la quatrième face de direction n variable : *l'équilibre entraîne que sur cette face $F(x, n)$ dépend linéairement de n .*

Contraintes de Cauchy

Théorème de Noll (1973): H2 est entraînée par

- H2') $F(x, \Sigma)$ est bornée.

Principe de la démonstration de Cauchy : considérer

- un volume tendant vers zéro : *la dépendance en x devient négligeable. Les quantités volumiques aussi et l'action de F s'auto-équilibre.*
- un tétraèdre dont trois faces sont de directions fixées (*ainsi F y est fixée*) et la quatrième face de direction n variable : *l'équilibre entraîne que sur cette face $F(x, n)$ dépend linéairement de n .*

Résultat : Il existe un tenseur $\sigma(x)$ tel que $F(x, n) = \sigma(x) \cdot n$

Forces d'arêtes

Si on considère la présence d'une densité \mathcal{F} de forces le long des arêtes le résultat de Cauchy n'est plus valable.

Forces d'arêtes

Si on considère la présence d'une densité \mathcal{F} de forces le long des arêtes le résultat de Cauchy n'est plus valable.

Renforçons l'hypothèse H4 par

- H4') Pour tout champ régulier de vitesse V , la puissance des actions mécaniques de surface et d'arêtes sur un volume fermé est équilibrée par une densité volumique (puissance forces à distance ou d'inertie) bornée.

Forces d'arêtes

Si on considère la présence d'une densité \mathcal{F} de forces le long des arêtes le résultat de Cauchy n'est plus valable.

Renforçons l'hypothèse H4 par

- H4') Pour tout champ régulier de vitesse V , la puissance des actions mécaniques de surface et d'arêtes sur un volume fermé est équilibrée par une densité volumique (puissance forces à distance ou d'inertie) bornée.

On montre [F. Dell'Isola, P. S., 1997] alors que la présence de forces de surface et d'arêtes seules est impossible : aux forces d'arêtes est forcément lié un nouveau type d'interaction de surface \mathcal{G} dont la puissance est $\int_{\Sigma} \mathcal{G} \cdot \frac{\partial V}{\partial n}$.

Forces d'arêtes

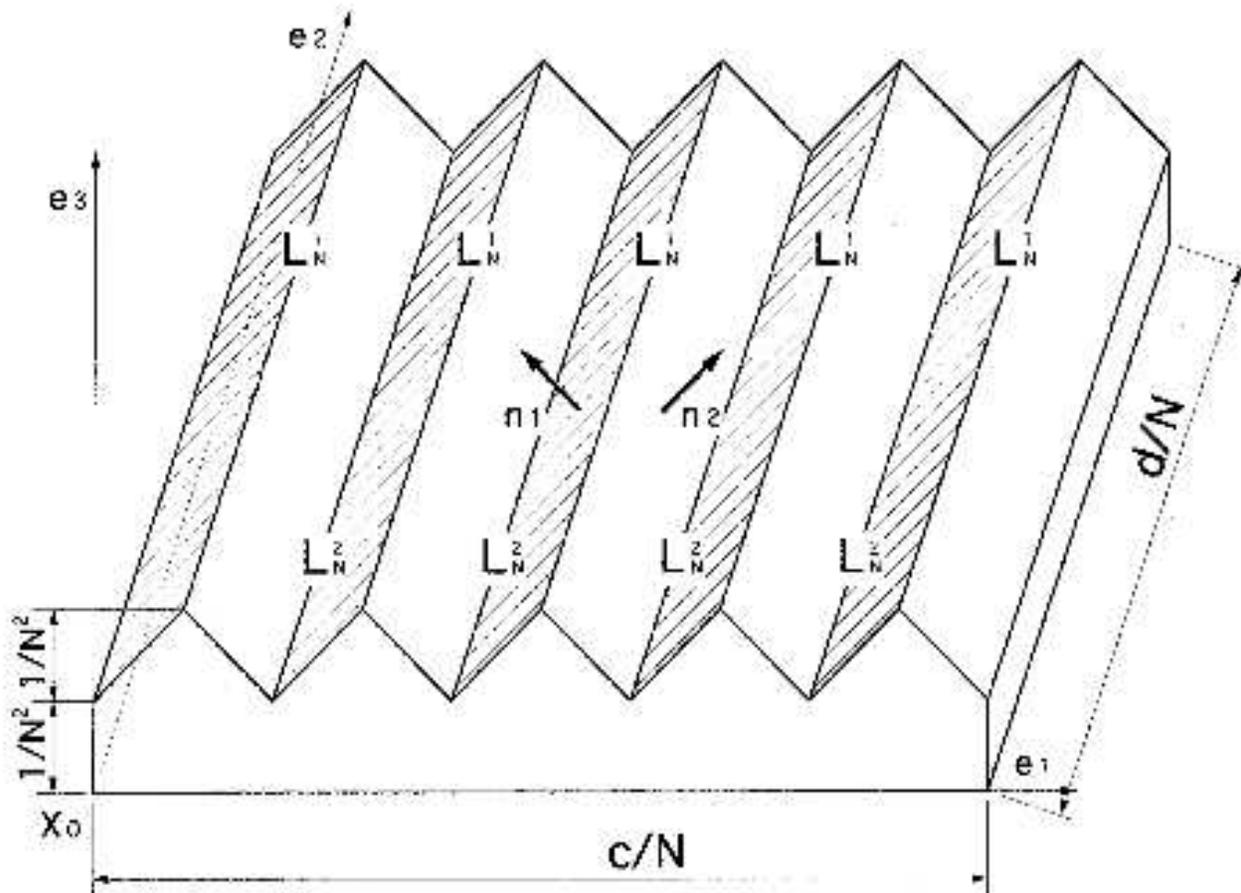


Figure 1. Grooved surface close to a plane

Forces d'arêtes

On montre un théorème analogue à celui de Noll (sous des hypothèses voisines) : $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, n)$.

Forces d'arêtes

On montre un théorème analogue à celui de Noll (sous des hypothèses voisines) : $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, n)$.

Puis un théorème similaire à celui de Cauchy : il existe un tenseur (d'ordre 3) C tel que

$$\mathcal{G}(x, n) = (C(x) \cdot n) \cdot n.$$

Forces d'arêtes

On montre un théorème analogue à celui de Noll (sous des hypothèses voisines) : $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, n)$.

Puis un théorème similaire à celui de Cauchy : il existe un tenseur (d'ordre 3) C tel que

$$\mathcal{G}(x, n) = (C(x) \cdot n) \cdot n.$$

Le tenseur C représente aussi les forces d'arêtes:

$$\mathcal{F}(x, \Sigma) = (C(x) \cdot n_1) \cdot \nu_1 + (C(x) \cdot n_2) \cdot \nu_2$$

Forces d'arêtes

On montre un théorème analogue à celui de Noll (sous des hypothèses voisines) : $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, n)$.

Puis un théorème similaire à celui de Cauchy : il existe un tenseur (d'ordre 3) C tel que

$$\mathcal{G}(x, n) = (C(x) \cdot n) \cdot n.$$

Le tenseur C représente aussi les forces d'arêtes:

$$\mathcal{F}(x, \Sigma) = (C(x) \cdot n_1) \cdot \nu_1 + (C(x) \cdot n_2) \cdot \nu_2$$

Un tenseur supplémentaire σ est nécessaire pour représenter les forces de surface:

$$F(x, \Sigma) = \sigma \cdot n - \operatorname{div}^s((C(x) \cdot n) \cdot (Id - n \otimes n))$$

Forces d'arêtes

On montre un théorème analogue à celui de Noll (sous des hypothèses voisines) : $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, n)$.

Puis un théorème similaire à celui de Cauchy : il existe un tenseur (d'ordre 3) C tel que

$$\mathcal{G}(x, n) = (C(x) \cdot n) \cdot n.$$

Le tenseur C représente aussi les forces d'arêtes:

$$\mathcal{F}(x, \Sigma) = (C(x) \cdot n_1) \cdot \nu_1 + (C(x) \cdot n_2) \cdot \nu_2$$

Un tenseur supplémentaire σ est nécessaire pour représenter les forces de surface:

$$F(x, \Sigma) = \sigma \cdot n - \operatorname{div}^s((C(x) \cdot n) \cdot (Id - n \otimes n))$$

Cette théorie, plus précise que celle de Cauchy, est-elle utile ?

Matériaux de second gradient

Considérons dans un domaine Ω , un matériau de champ de déplacements u et dont la fonctionnelle d'énergie élastique est $F(u)$. On suppose

- $F : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow [0, +\infty]$, quadratique,
- $F(u) \geq \|u\|_{H^1}^2$ (coercivité),
- F semi-continue inférieurement (topologie L^2),
- f est une densité volumique de forces externes ($\in L^2$).

Matériaux de second gradient

Considérons dans un domaine Ω , un matériau de champ de déplacements u et dont la fonctionnelle d'énergie élastique est $F(u)$. On suppose

- $F : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow [0, +\infty]$, quadratique,
- $F(u) \geq \|u\|_{H^1}^2$ (coercivité),
- F semi-continue inférieurement (topologie L^2),
- f est une densité volumique de forces externes ($\in L^2$).

Une solution d'équilibre u_0 existe, solution de

$$\min_u \left\{ F(u) - \int_{\Omega} f \cdot u \right\}$$

Matériaux de second gradient

Supposons F de la forme

$$F(u) = \int_{\Omega} (\alpha \cdot \nabla u) \cdot \nabla u + (\beta \cdot \nabla \nabla u) \cdot \nabla \nabla u$$

si $u \in H^2$ et $u = 0$ sur une partie non négligeable du bord, $F(u) = +\infty$ sinon.

Matériaux de second gradient

Supposons F de la forme

$$F(u) = \int_{\Omega} (\alpha \cdot \nabla u) \cdot \nabla u + (\beta \cdot \nabla \nabla u) \cdot \nabla \nabla u$$

si $u \in H^2$ et $u = 0$ sur une partie non négligeable du bord, $F(u) = +\infty$ sinon.

Ecriture variationnelle : pour tout v admissible

$$\int_{\Omega} (2\alpha \cdot \nabla u_0) \cdot \nabla v + (2\beta \cdot \nabla \nabla u_0) \cdot \nabla \nabla v - f \cdot v = 0$$

Matériaux de second gradient

Supposons F de la forme

$$F(u) = \int_{\Omega} (\alpha \cdot \nabla u) \cdot \nabla u + (\beta \cdot \nabla \nabla u) \cdot \nabla \nabla u$$

si $u \in H^2$ et $u = 0$ sur une partie non négligeable du bord, $F(u) = +\infty$ sinon.

Ecriture variationnelle : pour tout v admissible

$$\int_{\Omega} \overbrace{(2\alpha \cdot \nabla u_0)}^a \cdot \nabla v + \overbrace{(2\beta \cdot \nabla \nabla u_0)}^b \cdot \nabla \nabla v - f \cdot v = 0$$

Matériaux de second gradient

Supposons F de la forme

$$F(u) = \int_{\Omega} (\alpha \cdot \nabla u) \cdot \nabla u + (\beta \cdot \nabla \nabla u) \cdot \nabla \nabla u$$

si $u \in H^2$ et $u = 0$ sur une partie non négligeable du bord, $F(u) = +\infty$ sinon.

Ecriture variationnelle : pour tout v admissible

$$\int_{\Omega} \underbrace{2\alpha}_{a} \cdot \nabla u_0 \cdot \nabla v + \underbrace{2\beta}_{b} \cdot \nabla \nabla u_0 \cdot \nabla \nabla v - f \cdot v = 0$$

Soit en intégrant par parties

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(a) + \operatorname{div}(\operatorname{div}(b)) - f) \cdot v + \int_{\partial\Omega} ((a - \operatorname{div}(b)) \cdot n) \cdot v + ((b \cdot n) \cdot n) \cdot \frac{\partial v}{\partial n} + (b \cdot n) \cdot \nabla^s v = 0$$

Matériaux de second gradient

Supposons F de la forme

$$F(u) = \int_{\Omega} (\alpha \cdot \nabla u) \cdot \nabla u + (\beta \cdot \nabla \nabla u) \cdot \nabla \nabla u$$

si $u \in H^2$ et $u = 0$ sur une partie non négligeable du bord, $F(u) = +\infty$ sinon.

Ecriture variationnelle : pour tout v admissible

$$\int_{\Omega} \underbrace{2\alpha}_{a} \cdot \nabla u_0 \cdot \nabla v + \underbrace{2\beta}_{b} \cdot \nabla \nabla u_0 \cdot \nabla \nabla v - f \cdot v = 0$$

Soit en intégrant par parties

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(a) + \operatorname{div}(\operatorname{div}(b)) - f) \cdot v + \int_{\partial\Omega} ((a - \operatorname{div}(b)) \cdot n) \cdot v + ((b \cdot n) \cdot n) \cdot \frac{\partial v}{\partial n} + (b \cdot n) \cdot \nabla^s v = 0$$

Et en intégrant par parties sur le bord

$$\int_{\Omega} (\dots) \cdot v + \int_{\partial\Omega} [(a - \operatorname{div}(b)) \cdot n - \operatorname{div}^s((b \cdot n) \cdot (Id - n \otimes n))] \cdot v + ((b \cdot n) \cdot n) \cdot \frac{\partial v}{\partial n} + \int_{\partial\partial\Omega} ((b \cdot n) \cdot \nu) \cdot v = 0$$

Matériaux de second gradient

Equation d'Euler

$$\operatorname{div}(a - \operatorname{div}(b)) + f = 0 \text{ sur } \Omega,$$

$$(a - \operatorname{div}(b)) \cdot n - \operatorname{div}^s((b \cdot n) \cdot (Id - n \otimes n)) = 0 \text{ sur } (\partial\Omega)^{\text{libre}},$$

$$(b \cdot n) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$[[(b \cdot n) \cdot \nu]] = 0 \text{ sur } \partial\partial\Omega,$$

Matériaux de second gradient

Equation d'Euler

$$\operatorname{div}(a - \operatorname{div}(b)) + f = 0 \text{ sur } \Omega,$$

$$(a - \operatorname{div}(b)) \cdot n - \operatorname{div}^s((b \cdot n) \cdot (Id - n \otimes n)) = 0 \text{ sur } (\partial\Omega)^{\text{libre}},$$

$$(b \cdot n) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$[[(b \cdot n) \cdot \nu]] = 0 \text{ sur } \partial\partial\Omega,$$

$\sigma = a - \operatorname{div}(b)$ joue *une partie* du rôle du tenseur de contraintes de Cauchy

Matériaux de second gradient

Equation d'Euler

$$\operatorname{div}(a - \operatorname{div}(b)) + f = 0 \text{ sur } \Omega,$$

$$(a - \operatorname{div}(b)) \cdot n - \operatorname{div}^s((b \cdot n) \cdot (Id - n \otimes n)) = 0 \text{ sur } (\partial\Omega)^{\text{libre}},$$

$$(b \cdot n) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$[[(b \cdot n) \cdot \nu]] = 0 \text{ sur } \partial\partial\Omega,$$

$\sigma = a - \operatorname{div}(b)$ joue *une partie* du rôle du tenseur de contraintes de Cauchy

Force de surface dépendant de la courbure:

Matériaux de second gradient

Equation d'Euler

$$\operatorname{div}(a - \operatorname{div}(b)) + f = 0 \text{ sur } \Omega,$$

$$(a - \operatorname{div}(b)) \cdot n - \operatorname{div}^s((b \cdot n) \cdot (Id - n \otimes n)) = 0 \text{ sur } (\partial\Omega)^{\text{libre}},$$

$$(b \cdot n) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$[[(b \cdot n) \cdot \nu]] = 0 \text{ sur } \partial\partial\Omega,$$

$\sigma = a - \operatorname{div}(b)$ joue *une partie* du rôle du tenseur de contraintes de Cauchy

Force de surface dépendant de la courbure:

Action de surface \mathcal{G} distribution du premier ordre:

Matériaux de second gradient

Equation d'Euler

$$\operatorname{div}(a - \operatorname{div}(b)) + f = 0 \text{ sur } \Omega,$$

$$(a - \operatorname{div}(b)) \cdot n - \operatorname{div}^s((b \cdot n) \cdot (Id - n \otimes n)) = 0 \text{ sur } (\partial\Omega)^{\text{libre}},$$

$$(b \cdot n) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$[[(b \cdot n) \cdot \nu]] = 0 \text{ sur } \partial\partial\Omega,$$

$\sigma = a - \operatorname{div}(b)$ joue une partie du rôle du tenseur de contraintes de Cauchy

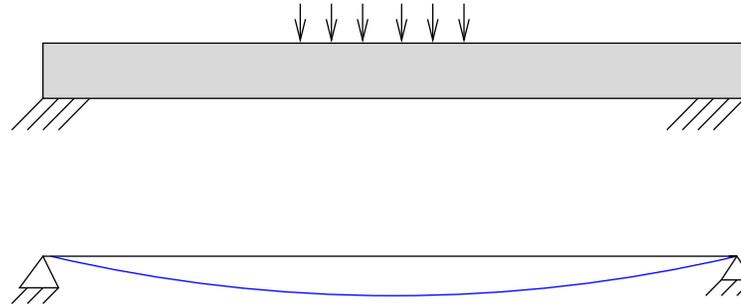
Force de surface dépendant de la courbure:

Action de surface \mathcal{G} distribution du premier ordre:

Force d'arête:

Exemples 1D

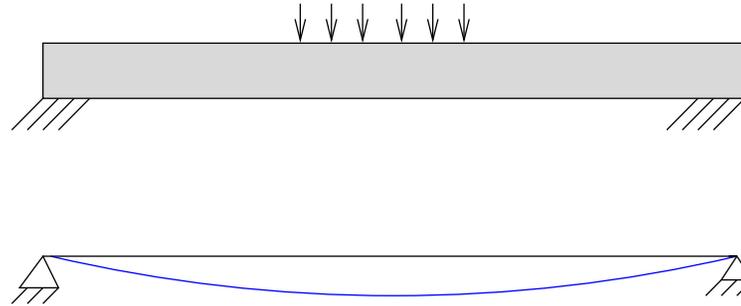
La poutre élastique en flexion



Déplacement transverse u : $u(0) = u(\ell) = 0$.

Exemples 1D

La poutre élastique en flexion

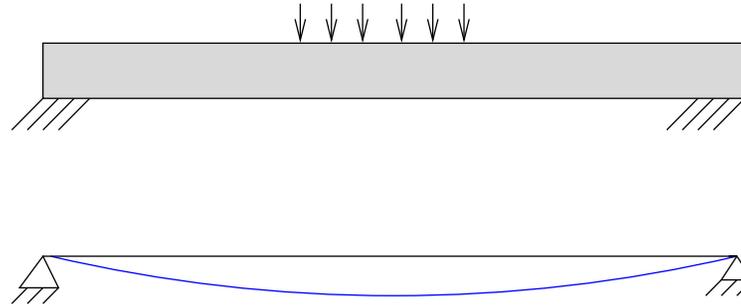


Déplacement transverse u : $u(0) = u(\ell) = 0$.

Energie : $F(u) = \int_0^\ell k(u'')^2 dx$.

Exemples 1D

La poutre élastique en flexion



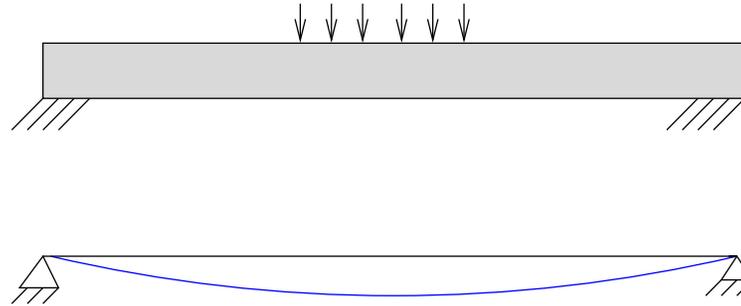
Déplacement transverse u : $u(0) = u(\ell) = 0$.

Energie : $F(u) = \int_0^\ell k(u'')^2 dx$.

Equation d'équilibre : $div(div(2ku'')) - f = 0$ sur $[0, \ell]$.

Exemples 1D

La poutre élastique en flexion



Déplacement transverse u : $u(0) = u(\ell) = 0$.

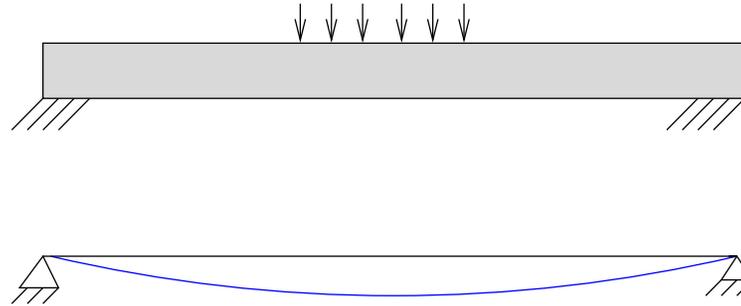
Energie : $F(u) = \int_0^\ell k(u'')^2 dx$.

Equation d'équilibre : $\operatorname{div}(\operatorname{div}(2ku'')) - f = 0$ sur $[0, \ell]$.

Conditions aux limites : $ku'' = 0$ en 0 et ℓ s'interprète en termes de couple - concept familier.

Exemples 1D

La poutre élastique en flexion



Déplacement transverse u : $u(0) = u(\ell) = 0$.

Energie : $F(u) = \int_0^\ell k(u'')^2 dx$.

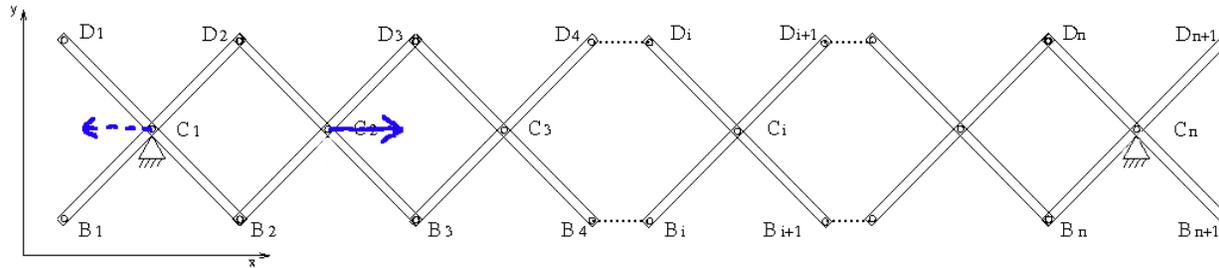
Equation d'équilibre : $\operatorname{div}(\operatorname{div}(2ku'')) - f = 0$ sur $[0, \ell]$.

Conditions aux limites : $ku'' = 0$ en 0 et ℓ s'interprète en termes de couple - concept familier.

Un modèle similaire 3D peut-il être obtenu par homogénéisation ?

Exemples 1D

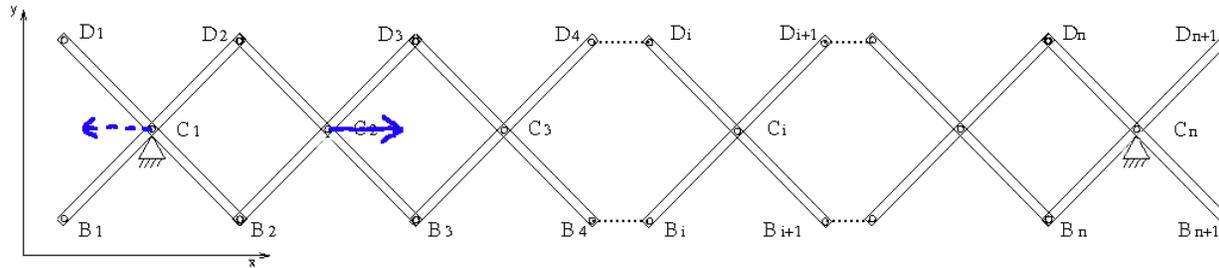
La poutre pantographe [JJ Alibert, F.Dell'Isola, P.S., 2003]



Déplacement transverse u , longitudinal w .

Exemples 1D

La poutre pantographe [JJ Alibert, F.Dell'Isola, P.S., 2003]

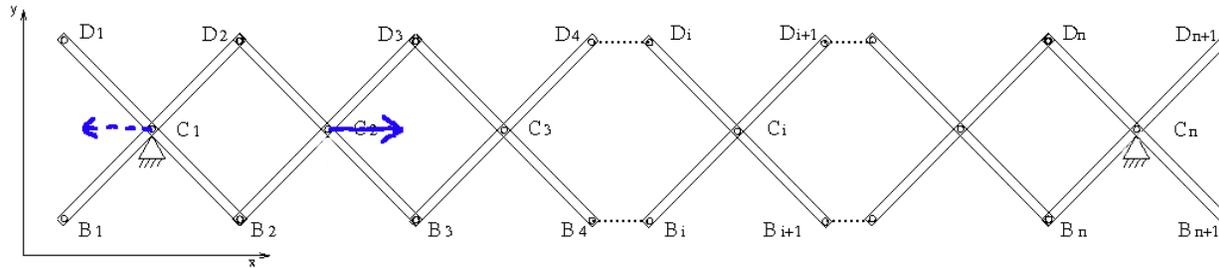


Déplacement transverse u , longitudinal w .

$$\text{Energie : } F(u, w) = \int_0^\ell k_v (u'')^2 + k_h (w'')^2 dx.$$

Exemples 1D

La poutre pantographe [JJ Alibert, F.Dell'Isola, P.S., 2003]



Déplacement transverse u , longitudinal w .

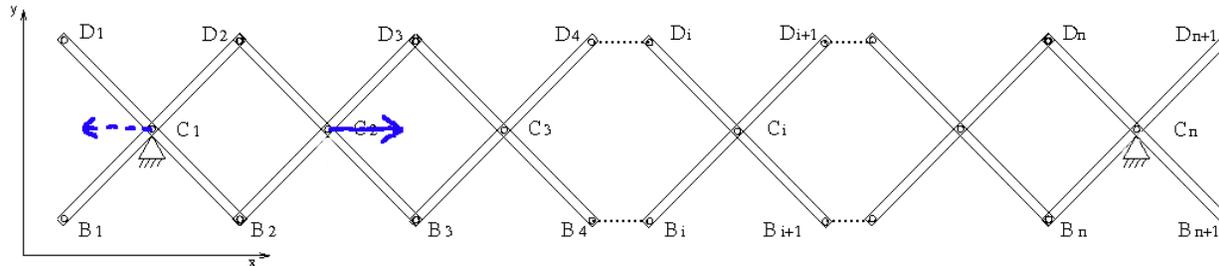
Energie : $F(u, w) = \int_0^\ell k_v (u'')^2 + k_h (w'')^2 dx$.

Equation d'équilibre supplémentaire :

$div(div(2k_h w'')) - f_h = 0$ sur $[0, \ell]$.

Exemples 1D

La poutre pantographe [JJ Alibert, F.Dell'Isola, P.S., 2003]



Déplacement transverse u , longitudinal w .

Energie : $F(u, w) = \int_0^\ell k_v (u'')^2 + k_h (w'')^2 dx$.

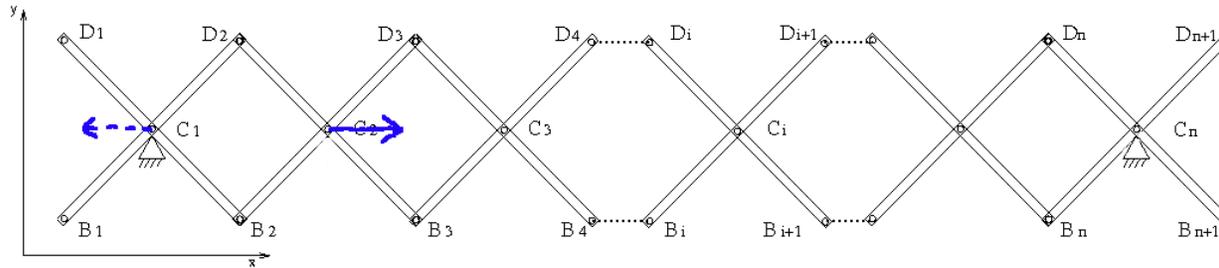
Equation d'équilibre supplémentaire :

$div(div(2k_h w'')) - f_h = 0$ sur $[0, \ell]$.

Conditions aux limites : $k_h w'' = 0$ (en 0 et ℓ) s'interprète en termes de double force [P. Germain, 1973].

Exemples 1D

La poutre pantographe [JJ Alibert, F.Dell'Isola, P.S., 2003]



Déplacement transverse u , longitudinal w .

Energie : $F(u, w) = \int_0^\ell k_v (u'')^2 + k_h (w'')^2 dx$.

Equation d'équilibre supplémentaire :

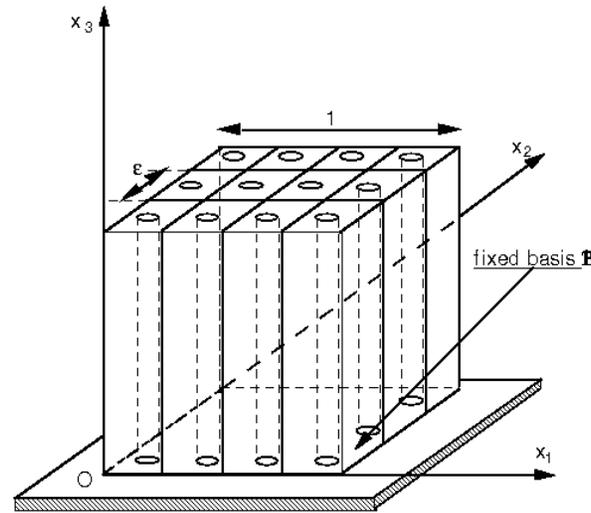
$div(div(2k_h w'')) - f_h = 0$ sur $[0, \ell]$.

Conditions aux limites : $k_h w'' = 0$ (en 0 et ℓ) s'interprète en termes de double force [P. Germain, 1973].

Un modèle similaire 3D peut-il être obtenu par homogénéisation ?

Premier exemple 3D

Matériau renforcé par des poutres



Matériau élastique isotrope à fort contraste entre matrice et fibres :

$$E_\varepsilon(u) = \int_{M_\varepsilon} \left[\frac{\lambda_0}{2} (\text{tr}(e(u)))^2 + \mu_0 e(u)^2 \right] dx + \int_{F_\varepsilon} \left[\frac{\lambda_\varepsilon}{2} (\text{tr}(e(u)))^2 + \mu_\varepsilon e(u)^2 \right] dx$$

si $u \in H^1$ et $u = 0$ on \mathcal{B} , $E_\varepsilon(u) = +\infty$ sinon.

Différents ordres de grandeur pour les coefficients de Lamé

Premier exemple 3D

Hypothèses géométriques :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log(r_\varepsilon) = 0$$

Hypothèses de rigidité :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_\varepsilon r_\varepsilon^4}{\varepsilon^2} = \mu_1 > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} = k$$

Premier exemple 3D

Hypothèses géométriques :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log(r_\varepsilon) = 0$$

Hypothèses de rigidité :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_\varepsilon r_\varepsilon^4}{\varepsilon^2} = \mu_1 > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} = k$$

Résultat [C.Pideri, P.S., 1997] : E_ε Γ -converge vers

$$E_0(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda_0}{2} (\text{tr}(e(u)))^2 + \mu_0 e(u)^2 \right] dx + \int_{\Omega} \frac{q}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right)^2 \right] dx$$

si $u \in H^1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \in L^2$, $u_3 = 0$ p.p. dans Ω , $u = \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ p.p. sur \mathcal{B} . ($q = \frac{\pi}{4} \frac{3k+2}{k+1} \mu_1$)

Matériaux atteignables

Résultat [M. Camar-Eddine, P. S., 2003]: **En dimension 3, toute énergie quadratique positive objective et semi-continue inférieurement résulte de l'homogénéisation d'une suite d'énergies élastiques isotropes.**

De plus, dans cette suite, le coefficient de Poisson (ou le rapport λ/μ) peut être fixé librement.

En particulier, les énergies de second gradient considérées précédemment sont atteignables.

Matériaux atteignables

Convergence utilisée : $F_n \xrightarrow{\tau} F$ signifie

i) *Borne inférieure* : $\forall (u_n)$ convergeant faiblement vers u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F(u) .$$

ii) *Borne supérieure* : Pour tout u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, il existe une suite approximante (u_n) convergeant vers u fortement $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u) .$$

iii) *Deuxième borne supérieure* : Pour tout u dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, il existe (u_n) convergeant vers u fortement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u) .$$

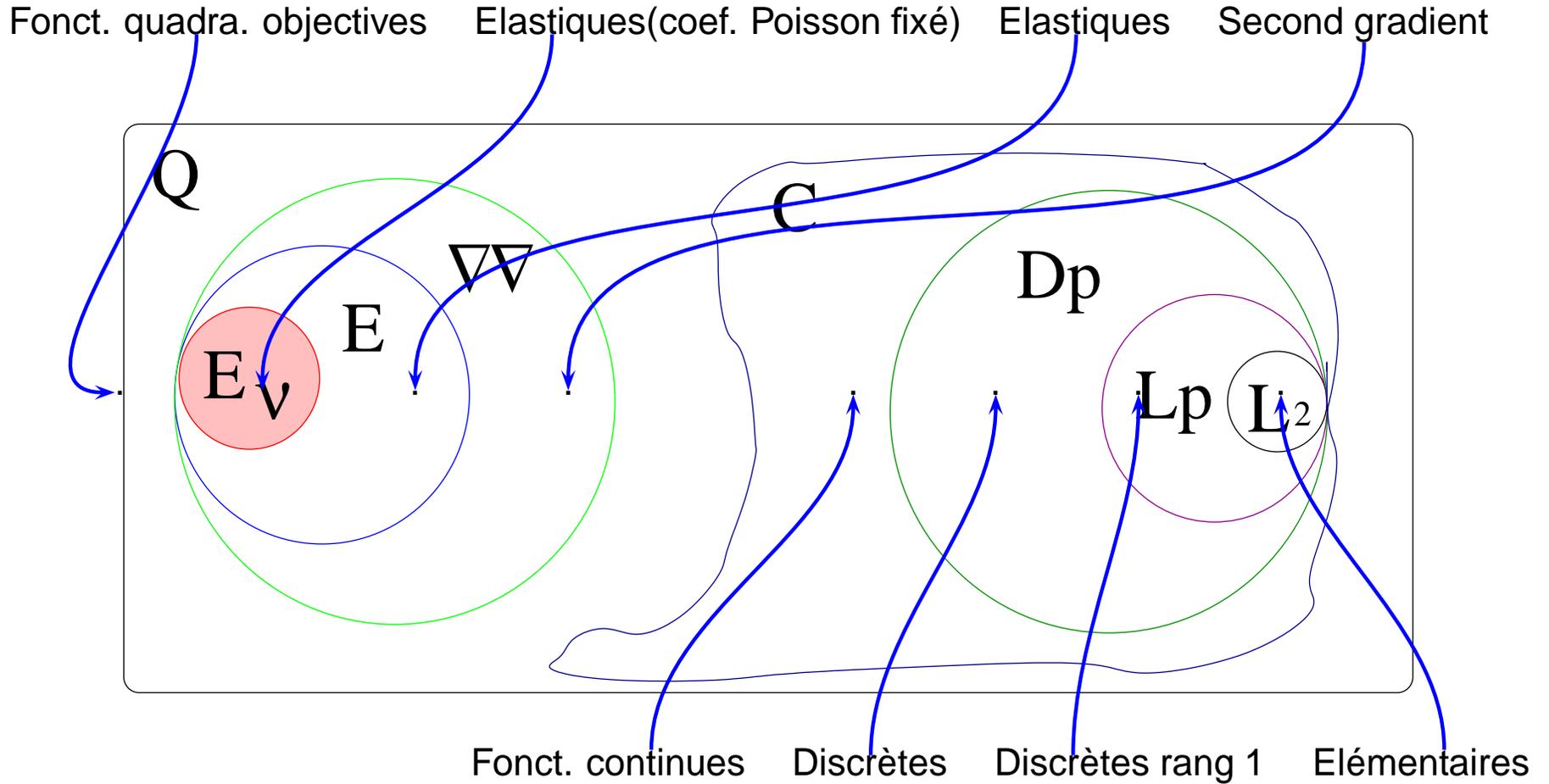
Cette convergence est forte \Rightarrow Mosco-convergence (L^2 et H^1) \Rightarrow Γ -convergence.
 \Rightarrow convergence des solutions d'équilibres sous l'action de forces raisonnables.

Matériaux atteignables

Avantages :

- topologie métrisable -> principe de diagonalisation utilisable,
- convergence résistante à l'addition de perturbations H^1 continues,
- possibilité d'une approche par étapes.

Matériaux atteignables



Démarche : passer successivement de E_ν à L_2 , L_p , D_p , C puis à Q .

Matériaux atteignables

Continues : $\int \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y)) \otimes (u(x) - u(y)) d\mu(x, y)$ où μ est une mesure à valeurs matricielles.

Matériaux atteignables

Continues : $\int \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y)) \otimes (u(x) - u(y)) d\mu(x, y)$ où μ est une mesure à valeurs matricielles.

Discrètes : $D_{q, (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} q(u(x_1 + x), u(x_2 + x), \dots, u(x_p + x))g(x) dx$ où q est une forme quadratique positive sur $(\mathbb{R}^3)^p$.

Matériaux atteignables

Continues : $\int \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y)) \otimes (u(x) - u(y)) d\mu(x, y)$ où μ est une mesure à valeurs matricielles.

Discrètes : $D_{q, (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} q(u(x_1 + x), u(x_2 + x), \dots, u(x_p + x)) g(x) dx$ où q est une forme quadratique positive sur $(\mathbb{R}^3)^p$.

Discrètes de rang 1 : $L_{(f_i), (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^p f_i \cdot u(x_i + x) \right)^2 g(x) dx$.

Matériaux atteignables

Continues : $\int \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y)) \otimes (u(x) - u(y)) d\mu(x, y)$ où μ est une mesure à valeurs matricielles.

Discrètes : $D_{q, (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} q(u(x_1 + x), u(x_2 + x), \dots, u(x_p + x)) g(x) dx$ où q est une forme quadratique positive sur $(\mathbb{R}^3)^p$.

Discrètes de rang 1 : $L_{(f_i), (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^p f_i \cdot u(x_i + x) \right)^2 g(x) dx$.

Elémentaires : $S_{(x_1, x_2), g}(u) = \int_{\tilde{\Omega}} \left((u(x_1 + x) - u(x_2 + x)) \cdot \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \right)^2 g(x) dx$

Matériaux atteignables

Continues : $\int \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y)) \otimes (u(x) - u(y)) d\mu(x, y)$ où μ est une mesure à valeurs matricielles.

Discrètes : $D_{q, (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} q(u(x_1 + x), u(x_2 + x), \dots, u(x_p + x)) g(x) dx$ où q est une forme quadratique positive sur $(\mathbb{R}^3)^p$.

Discrètes de rang 1 : $L_{(f_i), (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^p f_i \cdot u(x_i + x) \right)^2 g(x) dx$.

Elémentaires : $S_{(x_1, x_2), g}(u) = \int_{\tilde{\Omega}} \left((u(x_1 + x) - u(x_2 + x)) \cdot \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \right)^2 g(x) dx$

- L'étape $C- > Q$ est classique : pour tout F dans Q sa régularisée de Moreau-Yosida $F_n(u) := \inf_v F(v) + n\|u - v\|^2$ est continue et τ -converge vers F .

Matériaux atteignables

Continues : $\int \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y)) \otimes (u(x) - u(y)) d\mu(x, y)$ où μ est une mesure à valeurs matricielles.

Discrètes : $D_{q, (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} q(u(x_1 + x), u(x_2 + x), \dots, u(x_p + x)) g(x) dx$ où q est une forme quadratique positive sur $(\mathbb{R}^3)^p$.

Discrètes de rang 1 : $L_{(f_i), (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^p f_i \cdot u(x_i + x) \right)^2 g(x) dx$.

Elémentaires : $S_{(x_1, x_2), g}(u) = \int_{\tilde{\Omega}} \left((u(x_1 + x) - u(x_2 + x)) \cdot \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \right)^2 g(x) dx$

- L'étape $C- > Q$ est classique : pour tout F dans Q sa régularisée de Moreau-Yosida $F_n(u) := \inf_v F(v) + n\|u - v\|^2$ est continue et τ -converge vers F .
- L'étape $D_p- > C$ consiste à discrétiser la mesure μ .

Matériaux atteignables

Continues : $\int \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y)) \otimes (u(x) - u(y)) d\mu(x, y)$ où μ est une mesure à valeurs matricielles.

Discrètes : $D_{q, (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} q(u(x_1 + x), u(x_2 + x), \dots, u(x_p + x)) g(x) dx$ où q est une forme quadratique positive sur $(\mathbb{R}^3)^p$.

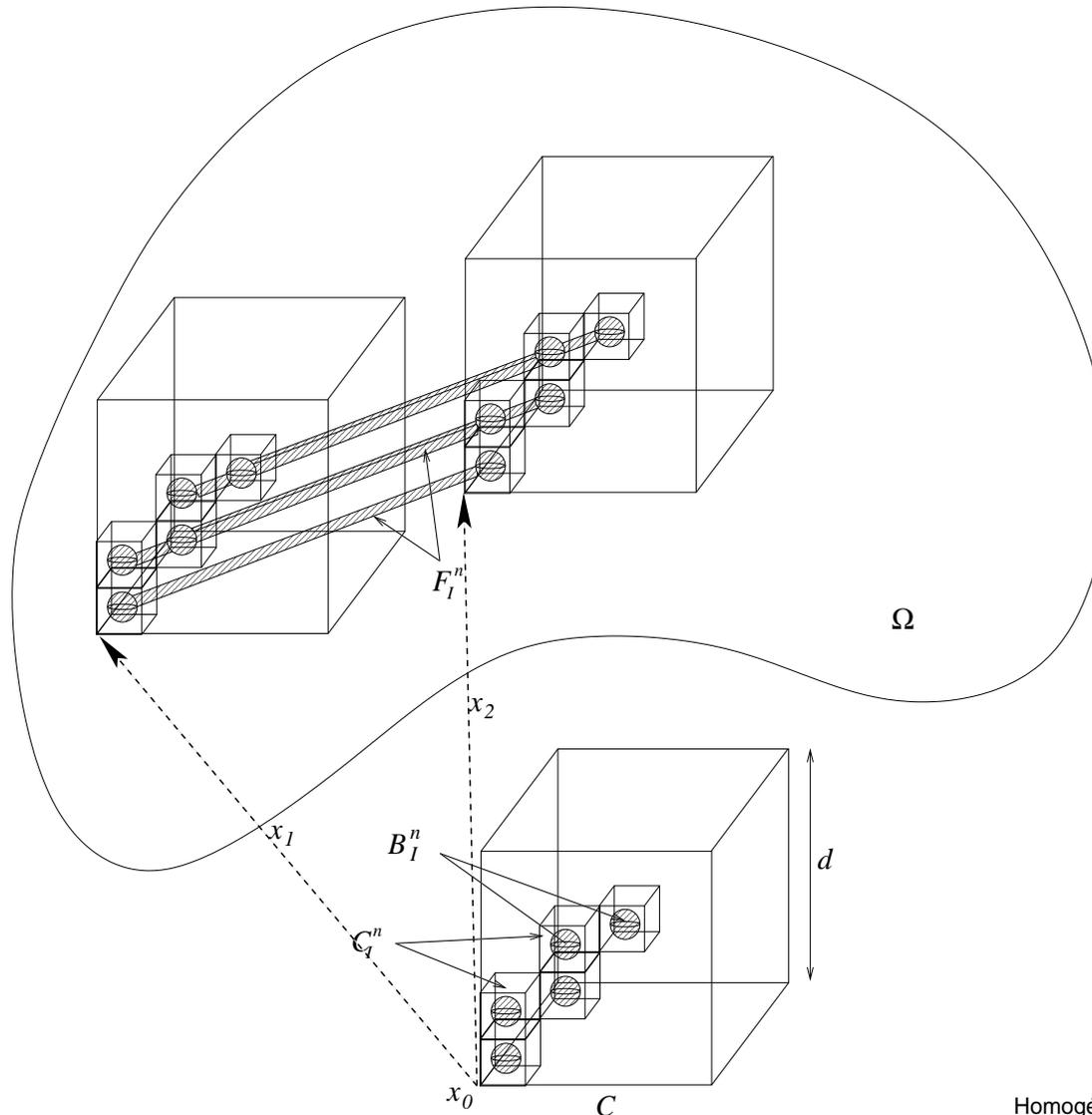
Discrètes de rang 1 : $L_{(f_i), (x_i), g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^p f_i \cdot u(x_i + x) \right)^2 g(x) dx$.

Elémentaires : $S_{(x_1, x_2), g}(u) = \int_{\tilde{\Omega}} \left((u(x_1 + x) - u(x_2 + x)) \cdot \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \right)^2 g(x) dx$

- L'étape $C- > Q$ est classique : pour tout F dans Q sa régularisée de Moreau-Yosida $F_n(u) := \inf_v F(v) + n\|u - v\|^2$ est continue et τ -converge vers F .
- L'étape $D_p- > C$ consiste à discrétiser la mesure μ .
- Les étapes $L_2- > L_p- > D_p$ consistent
 - à construire des "treillis" adaptés dont les noeuds forment des réseaux de boules.
 - jouer sur la capacité de ces réseaux pour qu'ils restent connectés ou non à la matrice par homogénéisation.

Matériaux atteignables

- L'étape $E_\nu \rightarrow L_2$ est un résultat d'homogénéisation:



Matériaux atteignables

- Ordre de grandeur du diamètre des cylindres r_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3} |\ln r_n| = +\infty$ (capacité limite nulle) *
- Diamètres exacts $r_I^n := r_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\|x_2 - x_1\| n^3}{\pi(1+\nu)} \int_{C_I^n} g(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ règlent l'interaction.
- Centres des boules réglés pour éviter toute collision.
- Rayon des boules : n^{-2} (capacité limite infinie).
- Rigidité du matériau :

$$\alpha_n(x) := \begin{cases} n^{-1/2} & \text{dans la matrice,} \\ r_n^{-2} n^{-3} & \text{dans les fibres.} \end{cases}$$

Matériaux atteignables

- Ordre de grandeur du diamètre des cylindres $r_n : \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3} |\ln r_n| = +\infty$ (capacité limite nulle) *
- Diamètres exacts $r_I^n := r_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\|x_2 - x_1\| n^3}{\pi(1+\nu)} \int_{C_I^n} g(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ règlent l'interaction.
- Centres des boules réglés pour éviter toute collision.
- Rayon des boules : n^{-2} (capacité limite infinie).
- Rigidité du matériau :

$$\alpha_n(x) := \begin{cases} n^{-1/2} & \text{dans la matrice,} \\ r_n^{-2} n^{-3} & \text{dans les fibres.} \end{cases}$$

Théorème : la suite $E_{\alpha_n, \nu}(u) := \int_{\Omega} \alpha_n(x) \left(\|e(u)\|^2 + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \text{tr}(e(u))^2 \right) dx$ τ -converge vers $S_{(x_1, x_2), g}$.

Conclusion

L'homogénéisation (à fort contraste) relie les matériaux, du plus classique au plus exotique.

Il est légitime d'attendre de la mécanique des milieux continus une bonne "résistance" à l'homogénéisation.

On ne peut se limiter à la description de Cauchy des actions mécaniques de contact.